



Серия №14. Добавка

9 июля

8. Представим квадратный трехчлен в виде суммы квадратов нескольких линейных функций или квадратов констант. Очевидно, что полученная функция принимает только неотрицательные значения. Например,

$$(x + 2)^2 + (0,5x - 1)^2 + 2^2 = 1,25x^2 + 3x + 9 \geq 0$$

- а) Представьте квадратный трехчлен $3x^2 + 10x + 10$ в виде суммы квадратов.
б) Докажите, что любой квадратный трехчлен с неположительным дискриминантом является суммой не более, чем двух квадратов.
в) Докажите, что квадратный трехчлен $x^2 + x + 1$ не является суммой нескольких квадратов с целыми коэффициентами.

В следующих пунктах рассмотрим квадратный трехчлен $ax^2 + 2bx + c$ с целыми коэффициентами и неположительным дискриминантом ($a, c > 0$).

- г) Докажите, что если $|b| \leq a, |b| \leq c$, то он является суммой нескольких квадратов с целыми коэффициентами.

- д) Пусть $b \geq 0, a \leq c, a \leq b$. Докажите, что в этом случае квадратный трехчлен является суммой нескольких квадратов с целыми коэффициентами. Для этого рассмотрите трехчлен с наименьшим b , который «не является суммой квадратов».

- е) А что делать в случае других знаков?

- ж) Пусть $p = 4k + 1$ – простое, и $b^2 + 1 : p$. Рассмотрим $f(x) = ax^2 + 2bx + p$, где $a = \frac{b^2 + 1}{p}$. Чему равен дискриминант?

- з) Пусть $f(x)$ из пункта ж) – сумма квадратов: $f(x) = (kx + l)^2 + \dots$. Докажите, что у трехчлена $f(x) - (kx + l)^2$ неположительный дискриминант.

- и) Найдите четверть этого дискриминанта в виде $Dp/4p$ (на p не сокращайте!) и докажите рождественскую теорему Ферма.